4ο φυλλάδιο ασκήσεων-Πραγματική Ανάλυση
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκων: Χρήστος Σαρόγλου

1. Έστω $\mathcal{A}$ μία οικογένεια ξένων ανά δύο διαστημάτων (του $\mathbb{R}$). Να δειχθεί ότι η $\mathcal{A}$ είναι το πολύ αριθμήσιμη. [Υπόδειξη: Κάθε διάστημα περιέχει έναν ρητό.]

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία αύξουσα συνάρτηση. Να δειχθεί ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι το πολύ αριθμήσιμο. [Υπόδειξη: Γνωρίζουμε ότι τα πλευρικά όρια υπάρχουν σε κάθε σημείο. Η f είναι ασυνεχής στο ξ αν και μόνο αν $\lim_{x\to\xi^-} f(x) < \lim_{x\to\xi^+} f(x)$. Δείξτε ότι τα στοιχεία της οικογένειας διαστημάτων $\{(\lim_{x\to\xi^-} f(x), \lim_{x\to\xi^+} f(x)) : \xi$ σημείο ασυνέχειας της $f\}$ είναι ξένα ανά δύο και χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.]

3. Έστω μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ από έναν μετρικό χώρο (X, d) και $f : X \to \mathbb{R}$. Αν η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του X, να δειχθεί ότι η f είναι συνεχής.

4. Έστω $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ακολουθίες από το $[a, b]$, τέτοιες ώστε $a_n \to a$ και $b_n \to b$, να δειχθεί ότι

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

5. Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Αν $L \subseteq C(X)$ είναι ένα lattice, να δειχθεί ότι η κλειστότητα του L με την ομοιόμορφη νόρμα επίσης είναι ένα lattice.

6. Ένας μετρικός χώρος ονομάζεται διαχωρίσιμος αν περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Να δειχθεί ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

7. Το Θεώρημα Stone-Weierstrass λέει ότι για κάθε συνεχή $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, υπάρχει μία ακολουθία πολυωνύμων P_n, τέτοια ώστε $P_n \to f$, ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Χρησιμοποιώντας αυτό, να δειχθεί ότι ο $C([a, b])$ είναι διαχωρίσιμος.

8. Έστω $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε $f_n(x) := F(x^n)$, $x \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$. Αν η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής στο 1, να δειχθεί ότι η F είναι σταθερή συνάρτηση (το αντίστροφο φυσικά ισχύει τετριμμένα).

9. Έστω $\{f_n\}$ μία ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $[a, b]$. Αν $g_n(x) := \int_a^x f_n(t)dt$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι η $\{g_n\}$ έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία.

10. Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $A \subseteq C(X)$ ένα ισοσυνεχές σύνολο. Να δειχθεί ότι το A είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχές, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $f \in A$ και για κάθε $x, y \in X$, με $d(x, y) < \delta$, να ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.